

Démonstrations importantes du cours de MSF

Voici une liste des démonstrations les plus importantes du cours de Mécanique des solides et des fluides. Cette liste n'est pas exhaustive et ne prétend pas reprendre toute la matière. Les astérisques représentent le nombre de fois que la question a été posée à l'oral en 2003 et 2004 (sur base de www.oraux.be.tf).

Courage...

Lionel Mottard

	<u>Démonstration</u>	<u>Fréquence</u>	<u>Page</u>
	Théorème de Gauss 3D		1-17
p1	-> Applications + Green + Gauss 2D		
p1	Théorème de Stokes		1-21
p2	Dérivée matérielle d'une intégrale de volume	**	1-31
	Relation de Cauchy		2-4
	Equation de continuité et conservation de la masse	****	2-8
P3	-> Application 2D		
	Loi de la résultante cinétique et loi du moment cinétique	*****	2-10
	-> Démonstration du tenseur des contraintes symétrique	*****	
p3 + p3b + p4	-> Théorème d'Euler 1		5-10
	Théorème de Cauchy-Poisson		2-15
	Directions principales		2-21
	Construction du cercle de Mohr	*	2-31
	Expression du mouvement relatif		3-2
	Tenseur des déformations		3-9
	Equations de compatibilité	*	3-28
p5	Pourquoi a-t-on besoin des équations constitutives	***	4-1
p5 + p5b	Equation de Stokes		4-3
	Loi de Hooke + pourquoi on a besoin des lois de comportement ?	*****	4-7
p5b	Loi du moment cinétique		5-16
	-> 2 ^{ème} théorème d'Euler	*****	8-12
	Théorème de l'énergie cinétique		5-18
	-> conservation de l'énergie		
	Principe d'Archimède		7-6
	$p + \rho \cdot g \cdot z = \text{Cte}$		7-12
	-> Pascal		7-17
p6	Equations d'Euler		9-2
	Equation de Lamb		
p7	-> Bernoulli 1 et 2	*****	9-4
	Ecoulement d'un gaz parfait en évolution adiabatique		9-12

	Théorème d'Hugoniot		9-15
	Théorème de Kelvin et théorème de Lagrange		9-20
	Théorème de Helmholtz 1 et 2 -> Application aube		9-22
p8	Equation de Navier-Stokes + application avec les 2 plaques	*****	10-4
	Equation de Helmholtz		10-5
	Equation de Navier-Stokes avec turbulence		10-14
p9	Bernoulli 3	***	10-17
	Bernoulli 4		10-19

Unités principales

<u>Symbole</u>	<u>Unité</u>
f_i = force de volume	N/m ³
F_i = force massique	N/kg
T_i	N/m ²
τ_{ij}	N/m ²
ρ	N/m ³
μ = viscosité dynamique	Force * temps / longueur ²
ν = viscosité cinématique	Longueur ² / temps

① GAUSS 3D

$$\int_V \partial_i T_{...} dV = \oint_S T_{...} n_i dS$$

Démo pour $i=1$

$$\begin{aligned} \int_V \partial_1 T_{...} dV &= \iiint \partial_1 T_{...} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iint dx_2 dx_3 \int_B^A \partial_1 T_{...} dx_1 \\ &= \iint (T_A - T_B) dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (dx_2 dx_3)_A = |n_1| dS_A = n_1 dS_A \\ (dx_2 dx_3)_B = |n_1| dS_B = -n_1 dS_B \end{cases}$$

car $n_1 > 0$

car $n_1 < 0$



soit $\begin{cases} S' : \text{partie de } S \text{ où } n_1 > 0 \\ S'' : \text{partie de } S \text{ où } n_1 < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \iiint_V \partial_1 T_{...} dV = \int_{S'} T_{...} n_1 dS' + \int_{S''} T_{...} n_1 dS'' = \oint_S T_{...} n_1 dS$$

Stokes

$$\int_S (\vec{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{S} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

→ on prend Gauss 2D : $\int_S \partial_\alpha T_{...} dS = \oint_L n_\alpha T_{...} dL$

et on prend $T_{...} = \delta_{3 \times \beta} v_\beta$

$$\Rightarrow \int_S \partial_\alpha \delta_{3 \times \beta} v_\beta dS = \oint_L \delta_{3 \times \beta} v_\beta n_\alpha dL$$

or $\vec{F} = \vec{l} \times \vec{m}$

⇒ $t_\beta = \delta_{\beta k} (\vec{l})_k m_\alpha$ et $k=3$ (car $k \perp \vec{m}$ et $\perp \vec{F}$)

⇒ $t_\beta = \delta_{3 \times \beta} m_\alpha$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_S (\vec{\text{rot}} \vec{v})_s dS &= \left(\int_S \delta_{3 \times \beta} \partial_\alpha v_\beta dS \right) \\ &= \oint_L \delta_{3 \times \beta} m_\alpha v_\beta dL \\ &= \oint_L t_\beta v_\beta dL \end{aligned}$$

②

Dérivée matérielle

$$v_i^\bullet = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{v_i(\bar{x}' + t + dt) - v_i(\bar{x}, t)}{dt}$$

$$= \partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i$$

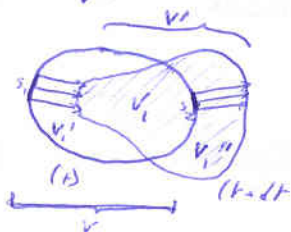
$$\Rightarrow \text{généralisation: } T_{ij\dots}^\bullet = \partial_0 T_{ij\dots} + v_k \partial_k T_{ij\dots}$$

→ dérivée sous l'intégrale de volume:

$$\text{soit } I = \int_V T_{kl\dots} dV$$

(notation indicelle non respectée, à adapter en fonction de l'expression (scalaire, vecteur, ...))

$$I^\bullet = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\int_{V'} \partial_0 T_{kl\dots}(\bar{x}', t + dt) dV - \int_V T_{kl\dots}(\bar{x}, t) dV \right]$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{soit } & \begin{cases} V = V_1' + V_1 \\ V' = V_1'' + V_1 \\ S = S_1 + S_2 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} S_1: \vec{v} \cdot \vec{n} < 0 \\ S_2: \vec{v} \cdot \vec{n} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{on décompose les } \int \text{ et on regroupe les termes et } \begin{cases} dV'' = n_i v_i dS_2 \\ dV_1' = -n_i v_i dS_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I^\bullet = \int_V \partial_0 T_{kl\dots} dV + \oint_S T_{kl\dots} v_i n_i dS$$

$$\rightarrow \text{Gauss} \Rightarrow I^\bullet = \int_V [\partial_0 T_{kl\dots} + \partial_i (v_i T_{kl\dots})] dV$$

$$= \int_V [T_{kl\dots}^\bullet + T_{kl\dots} (\partial_i v_i)] dV \quad (\text{car } T_{ij\dots}^\bullet = \partial_0 T_{ij\dots} + v_k \partial_k T_{ij\dots})$$

③

Conservation de la masse

"la masse contenue dans un volume matériel ne varie pas au cours du temps"

$$M = \int_V \rho \, dV$$

$$\Rightarrow M^{\circ} = \left[\int_V \rho \, dV \right]^{\circ}$$

$$= \int_V \left[\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) \right] dV$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \text{équation de continuité : } \begin{cases} \partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0 \\ \rho^{\circ} + \rho \partial_i v_i = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho^{\circ} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta: \text{ soit } I = \int_V T_{kl\dots} \rho \, dV = \int_V T_{kl\dots} \, dm$$

$$\Rightarrow I^{\circ} = \int_V T_{kl\dots}^{\circ} \, dm = \int_V T_{kl\dots}^{\circ} \rho \, dV$$

car la masse est conservée

Loi de la résultante cinétique"La dérivée en temps de la résultante cinétique est égale à Σ forces appliquées."

Un volume V limité par une surface S est soumis à $\left\{ \begin{array}{l} \text{des forces de volumes } \vec{f} \, dV \\ \text{" " " surfaces } \vec{T}^{(n)} \, dS \end{array} \right.$

$$\text{on a : } \vec{R} = \int_V \rho \vec{v} \, dV$$

$$\Rightarrow R_i^{\circ} = \int \rho \dot{v}_i \, dV$$

$$= \int_V f_i \, dV + \oint_S \vec{T}^{(n)} \, dS$$

$$\Rightarrow R_i^{\circ} = \int_V f_i \, dV + \oint_S \tau_{ji} n_j \, dS \quad (\text{relation de Cauchy})$$

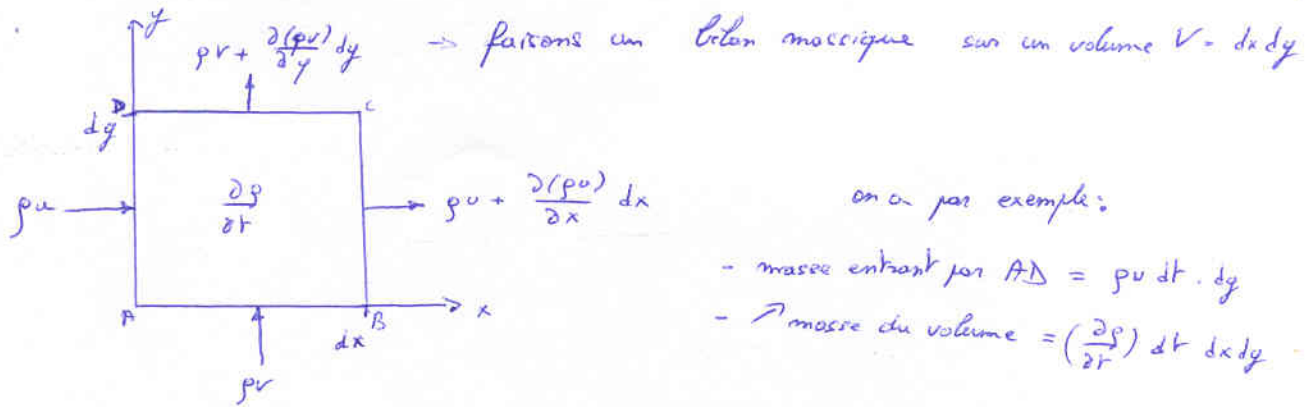
$$= \int_V f_i \, dV + \int_V \partial_j \tau_{ji} \, dV \quad (\text{Gauss 3D})$$

$$\Rightarrow \int_V [\rho \dot{v}_i + f_i - \partial_j \tau_{ji}] \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \dot{v}_i = f_i + \partial_j \tau_{ji}}$$

$$\rightarrow \text{statique} \Rightarrow \boxed{f_i + \tau_{ji,j} = 0}$$

3 bis

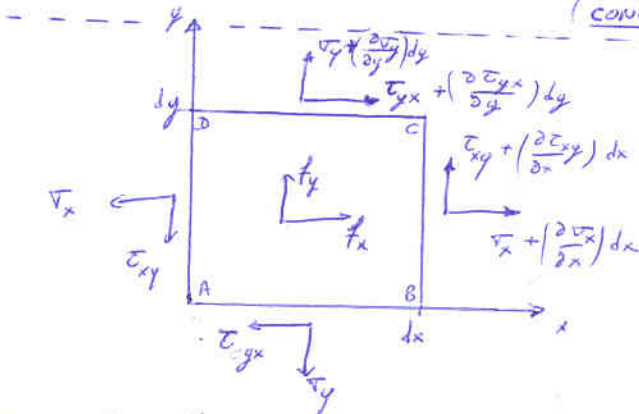


Bilan de masse $\Rightarrow$ masse dans V provient du flux massique au travers de la surface ext.

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} dt(dx dy) = \rho u dt dy - [\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx] dt dy + \rho v dt dx - [\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy] dt dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (= (\partial_i \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0))$$

(CONSERVATION DE LA MASSE)



• équilibre de translation selon x : $-\tau_{yx} dy + [\tau_{yx} + (\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx)] dy = \tau_{yx} dx + [\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy] dx + f_x dx dy$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (= (f_i + \tau_{ji,j}))$$

(= loi de R en statique)

• équilibre de rotation autour de C : $[f] = \frac{M}{m} \Rightarrow$ on multiplie par m^2

force selon $\bar{e}_y$

$$[\tau_{xy} dy] dx - [\tau_{yx} dx] dy + (\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}) dx dy \frac{dy}{2} - (\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}) dy dx \frac{dx}{2} + f_x dx dy \frac{dy}{2} - f_y dx dy \frac{dx}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ on néglige les termes du 2^e ordre en dx, dy devant ceux du 3^e ordre

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(TENSIEUR DES CONTRAINTE SYMÉTRIQUE)

(4) Loi du moment cinétique + tenseur des contraintes symétrique

"La dérivée $\dot{}$ temps du moment cinétique = Σ moments des forces extérieures"

Soit un volume V , limité par une surface S .

Le volume est soumis à des forces $\left\{ \begin{array}{l} \text{de volume } \bar{f} dV \\ \text{de surface } \bar{T}^{(n)} dS \end{array} \right.$

$$\mathcal{M} =: \int_V (\bar{r} \times \rho \bar{v}) dV \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_i = \int_V \delta_{ijk} x_j \rho v_k dV$$

$$\begin{aligned} \text{on a: } \mathcal{M}^{\circ} &= \int_V [\bar{r} \times \bar{v}]^{\circ} \rho dV && (\text{car la masse est conservée}) \\ &= \int_V [(\bar{v} \times \bar{v}) + (\bar{r} \times \bar{v}^{\circ})] \rho dV \\ &= \int_V (\bar{r} \times \bar{v}^{\circ}) \rho dV \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_V \bar{r} \times \bar{v}^{\circ} \rho dV = \int_V \bar{r} \times \bar{f} dV + \underbrace{\int_S \bar{r} \times \bar{T}^{(n)} dS}_{(2)}$$

$$\rightarrow \text{développons (2): } \oint_S \delta_{ijk} x_j \bar{T}_k^{(n)} dS = \oint_S \delta_{ijk} x_j \tau_{sk} n_s dS$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x_s} (\delta_{ijk} x_j \tau_{sk}) dV \quad (\text{Gauss 3D})$$

$$= \int_V \delta_{ijk} \left[\frac{\partial x_j}{\partial x_s} \tau_{sk} + x_j \frac{\partial \tau_{sk}}{\partial x_s} \right] dV$$

$\hookrightarrow$ car $dx_s \rightarrow$ on peut le sortir

$$\bullet \text{ or } \frac{\partial x_j}{\partial x_s} = \delta_{js}$$

$$= \int_V \delta_{ijk} \left(\underbrace{\delta_{js} \tau_{sk}}_{=\tau_{jk}} + x_j \frac{\partial \tau_{sk}}{\partial x_s} \right) dV$$

$$\Rightarrow \int_V \delta_{ijk} x_j \dot{v}_k^{\circ} \rho dV = \int_V \delta_{ijk} x_j f_k dV + \int_V \delta_{ijk} (\tau_{jk} + x_j \frac{\partial \tau_{sk}}{\partial x_s}) dV$$

$$\Rightarrow (\text{on regroupe}) \quad \int_V \delta_{ijk} \left[x_j \underbrace{(\rho \dot{v}_k^{\circ} - f_k - \tau_{sk,s})}_{=0 \text{ (loi de R)}} - \tau_{jk} \right] dV = 0$$

$$\Rightarrow \delta_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad \text{or } \tau_{jk} = \tau_{(jk)} + \tau_{[jk]}$$

$$\Rightarrow \delta_{ijk} [\tau_{(jk)} + \tau_{[jk]}] = 0$$

$$\bullet \text{ or } \delta_{ijk} \text{ est antisymétrique} \Rightarrow \text{antisym} \circ \text{sym} = 0 \Rightarrow \delta_{ijk} \tau_{(jk)} = 0 \Rightarrow \delta_{ijk} \tau_{[jk]} = 0 \Rightarrow \tau_{[jk]} = 0$$

⑤ Pourquoi a-t-on besoin des éq. constitutives?

éq. universelles :

• continuité : $\rho^0 + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

1 éq $\rightarrow$ 4 inc. ($\rho, \mathbf{v}$)

• R : $\rho \mathbf{v}_i^0 = f_i + \tau_{ij,j}$

3 éq $\rightarrow$ 9 inc (τ_{ij})

• M $\Rightarrow \tau_{ij}$ symétriques

3 éq $\rightarrow$ 0 inc

7 éq $\rightarrow$ 13 inc

$\rightarrow$ 7 éq universelles, ne dépendent pas du milieu étudié.

$\rightarrow$ il manque 6 éq. or on constate qu'aucune relation ne lie τ_{ij} au tenseur des déformations ou au tenseur des vitesses de déformation.

$\rightarrow$ statique : $\tau_{ij} = f(a_{kl})$

$\rightarrow$ dynamique : $\tau_{ij} = f(v_{kl})$

Δ notation indicelle non respectée

$\hookrightarrow$ ces équations tiennent compte du comportement et des propriétés physiques du milieu étudié $\Rightarrow$ éq. constitutives (ou de comportement).

$\rightarrow$ FLUIDE VISQUEUX NEWTONIEN

$\hookrightarrow$ supposons pour simplifier que la fonction du tenseur des vitesses de déformation $f(v_{kl})$ soit une fonction linéaire

$\Rightarrow \tau_{ij} = C_{ij} + D_{ijkl} v_{kl}$

• que le fluide est isotrope (composantes identiques & changem^t d'axe)

$\Rightarrow C_{ij}$ et D_{ijkl} isotropes $\nearrow$

Tenseur isotrope du 2^e ordre $\Rightarrow \alpha \delta_{ij}$

$\Rightarrow$ 4^e ordre $\Rightarrow D_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta' \delta_{il} \delta_{jk}$

$\Rightarrow \boxed{C_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \alpha \delta_{ij} v_{kk} + \beta v_{ij} + \beta' v_{ji}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -p \\ 2\mu = \beta + \beta' \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ si vitesse de déformation $\ll$

$\Rightarrow \boxed{\bar{\tau}_{ij} = -p \delta_{ij}}$

$\Rightarrow \bar{T}_i^{(n)} = \bar{\tau}_{ij} n_j = -p n_i$ ou $\bar{T}^{(n)} = -p \bar{n}$

$\Rightarrow$ pas de contrainte tg

$\Rightarrow$ cercle de Mohr = 1 point

5 bis

→ moyenne des contraintes normales :

$$\frac{1}{2} \tau_{kk} = -p + \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) v_{kk}$$

→ fluides incompressibles

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \tau_{kk} = -p$$

$$\Rightarrow 3\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} = -\frac{2}{3} \quad (\text{hyp. de Stokes})$$

→ eq. de Stokes :

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(v_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} v_{kk} \right)$$

→ SOLIDES

↳ hyp: élasticité linéaire

→ linéarité de toutes les relations

↳ Δ important : $\Rightarrow$ on peut résoudre par combiné EXISTANCE / UNICITE de la solution

→ déformations élastiques : déplacement et dérivée des déplacements très petits

→ on néglige les termes non linéaires du tenseur des déformations

$$\Rightarrow a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

→ Hooke (méthode 1)

↳ hyp

$$\Rightarrow \tau_{ij} = B_{ijkl} a_{kl}$$

(τ_{ij} = fct lin et homogène de a_{kl})

$\Rightarrow \tau_{ij}$ et a_{kl} sym

$$\Rightarrow B_{ijkl} = B_{(ij)(kl)}$$

→ solide isotrope

$$\Rightarrow B_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = \alpha \delta_{ij} a_{kk} + \beta a_{ij} + \gamma a_{ji}$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 2\mu \\ \alpha = \lambda \end{cases}$$

ou

$$\tau_{ii} = (2\mu + 3\lambda) a_{ii}$$

$$\Rightarrow 2\mu a_{ij} = \tau_{ij} - \lambda \delta_{ij} \frac{\tau_{kk}}{2\mu + 3\lambda}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \delta_{ij} \tau_{kk} \right)$$

→ Hooke (méthode 2)



↑ contrainte
↑ déplacement

1D

expérience

$$\Rightarrow \sigma_1 = E \epsilon_1$$

(déformation $\propto$ contrainte)

(1 = direction principale)

$$\Rightarrow \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 = -\nu \epsilon_1$$

(contraction latérale)

(2 et 3 $\perp$ 1)

3D

$$\begin{cases} \sigma_1 \Rightarrow \epsilon_1' = \frac{1}{E} \sigma_1 ; \epsilon_2' = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 ; \epsilon_3' = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 \\ \sigma_2 \Rightarrow \epsilon_1'' = -\frac{\nu}{E} \sigma_2 ; \epsilon_2'' = \frac{1}{E} \sigma_2 ; \epsilon_3'' = -\frac{\nu}{E} \sigma_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ superposition $\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_1' + \epsilon_1'' + \epsilon_1''' \\ \vdots \end{cases}$

$$\Rightarrow a_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \tau_{ij} - \nu \delta_{ij} \tau_{kk} \right]$$

ou $(a_{kk} = \frac{1-2\nu}{E} \tau_{kk})$

$$\Rightarrow \tau_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[a_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} a_{kk} \right]$$

⑧ Equations d'Euler

→ 1^{re} forme : loi de R $\Rightarrow \rho v_i^* = f_i + \tau_{ji,j}$

$$\text{or } \begin{cases} \tau_{ji} = -p \delta_{ij} & (\text{cf. ⑤}) \\ v_i^* = \partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho (\partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i) = f_i - \partial_i p} \quad \text{éqs. d'Euler 1^{re} forme}$$

→ 2^{de} forme

On reprend la 1^{re} forme et on modifie le 1^{er} membre pour que les dérivées portent sur l'ensemble de chaque terme.

$$\rightarrow \rho \partial_0 v_i = \partial_0 (\rho v_i) - v_i \partial_0 \rho$$

$$\rightarrow \rho v_k \partial_k v_i = \partial_k (\rho v_i v_k) - v_i \partial_k (\rho v_k)$$

$$\Rightarrow \partial_0 (\rho v_i) - \underline{v_i \partial_0 \rho} + \partial_k (\rho v_i v_k) - \underline{v_i \partial_k (\rho v_k)} = f_i - \partial_i p$$

$$\rightarrow \partial_0 \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0 \quad (\text{équation de continuité})$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_0 (\rho v_i) + \partial_k (\rho v_i v_k) + \partial_i p = f_i} \quad \text{équations d'Euler 2^{de} forme}$$

⑦ Equation de Lamb → Bernoulli 1 et 2

→ déf. de la dérivée matérielle de v_i : $v_i^\circ = \partial_0 v_i + v_k \partial_k v_i$
 $= \partial_0 v_i + v_k (\partial_k v_i - \partial_i v_k) + v_k \partial_i v_k$
 $= \partial_0 v_i + v_k \cdot 2 v_{[i,k]} + v_k \partial_k v_i$

or $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} \Rightarrow v_{[i,k]} = \delta_{ipk} \omega_p$ avec $\begin{cases} \omega = \frac{1}{2} \delta_{ij,k} \partial_i v_k \\ v_{[i,k]} = \frac{1}{2} (\partial_i v_k - \partial_k v_i) \end{cases}$

$\Rightarrow v_i^\circ = \partial_0 v_i + 2 \delta_{ipk} \omega_p v_k + \frac{1}{2} \partial_i (v_k v_k)$

$\Rightarrow$ éq. du mvt $\Rightarrow \rho v_i^\circ = f_i + \tau_{ij,j}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}) + \text{grad}(\frac{v^2}{2}) = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p}$ avec $f = \rho F$
 $\rho f_i = f_i$ $\Rightarrow$ on divise tout par ρ Eq. de Lamb.

→ Bernoulli

introduisons dans l'éq. de Lamb :
 • $F = -\text{grad } U$ (car F dérive en général d'un potentiel)
 • $\text{grad } p = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$, ou $p = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$
 or si fluide incompressible $\rho = \frac{p}{g}$

$\Rightarrow \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}) = -\text{grad}(\frac{v^2}{2}) - \text{grad } U - \text{grad } P$
 $= -\text{grad}(\underbrace{U + P + \frac{v^2}{2}}_{= \mathcal{E}})$

→ Dans le cas de la force pesanteur : $\mathcal{E} = gz + P + \frac{v^2}{2}$

→ Définissons la charge : $\mathcal{E} = gH \Rightarrow H = z + \frac{P}{g} + \frac{v^2}{2g}$

→ Bernoulli 1 : hyp : mouvement permanent

$\Rightarrow$ Lamb $\Rightarrow 2(\bar{\omega} \times \bar{v}) = -\text{grad } \mathcal{E}$
 $\perp$ aux surfaces $\mathcal{E} = \text{cte}$
 $\Rightarrow \bar{\omega} \times \bar{v} \perp \bar{v}$

$\Rightarrow$ "fluide pft en écoulement permanent soumis à un champ de forces massiques dérivant d'un V , l'énergie spécifique totale est cte le long d'une ligne de courant"

$\Rightarrow$ on multiplie par $\frac{1}{\bar{v}}$ les 2 membres $\Rightarrow \begin{cases} \bar{v} \cdot \text{grad } \mathcal{E} = 0 \\ \bar{\omega} \cdot \text{grad } \mathcal{E} = 0 \end{cases}$ ($\bar{v}$ est ty aux lignes de courant)

→ Bernoulli 2 : hyp : mvt permanent $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ Lamb $\Rightarrow 0 = -\text{grad } \mathcal{E} \Rightarrow$ "Bernoulli 1 partout"

⑧

Equations de Navier - Stokes

↳ fluides visqueux incompressible $\Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$ ou $\sum_k v_{k,k} = 0$

→ eq. générales du mov: $\rho v_i = f_i + \tau_{ji}$

$$\text{or } \tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} v_{kk} + 2\mu v_{i,j}$$

$$v_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

(tenseur des vitesses de déformation sym)

$$\Rightarrow \rho v_i = f_i + \partial_j [-p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} v_{kk} + 2\mu v_{ij}]$$

$$= f_i - \partial_i p + 2\mu \partial_j (\partial_j v_i - \partial_i v_j) + \lambda \delta_{ij} \partial_j v_{kk}$$

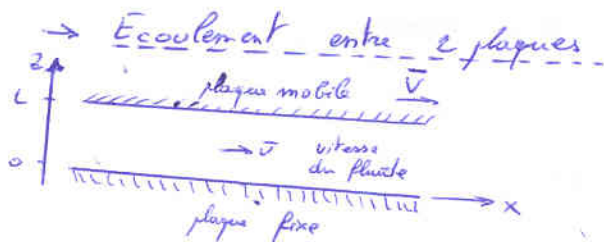
$$= f_i - \partial_i p + \mu (\partial_j \partial_j v_i + \partial_i \partial_j v_j)$$

(car fluide incompressible)

$$= f_i - \partial_i p + \mu \partial_j \partial_j v_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho (\partial_t v_i + v_k \partial_k v_i) = f_i - \partial_i p + \mu \partial_j \partial_j v_i}$$

equations de Navier-Stokes



hyp: (1): écoulement permanent $\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

(2): écoulement unidimensionnel $\Rightarrow \vec{v} = (u, 0, 0)$

(3): fluide incompressible $\Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad u = u(z)$$

$$\Rightarrow \text{eq. de Navier-Stokes: } \begin{cases} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \end{cases}$$

(1) (2) vitesse selon x uniquement (3)

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \\ 0 = \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \hat{p} = p + \rho g z \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\hat{p}}{dx} = c = a \quad (\text{car } \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x)) \Rightarrow \hat{p} = ax + b$$

$$\text{on a } \begin{cases} z=0 \Rightarrow u=0 \\ z=L \Rightarrow u=V \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{cas } a=0 \\ \text{cas } a \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow u = V \frac{z}{L} ; v=0 ; w=0$$

$$\Rightarrow u = \frac{a z}{2\mu} (z-L) + V \frac{z}{L} ; v=0 ; w=0$$

③ Bernoulli 3 et 4

Eq. de Lamb dans le cas des forces de pesanteur :

→ fluide pfr : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\rho(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\text{grad} \left(p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right)$

→ fluide visqueux : " = " + $\vec{f}'$

avec $f'_i = \underbrace{\partial_j \tau''_{ij}}_{\text{forces dues aux contraintes visqueuses}} + \underbrace{\partial_j \tau'_{ij}}_{\text{forces dues aux contraintes turbulentes}}$

→ Bernoulli 3 : " Soit 2 pts situés sur une ligne de courant d'un écoulement permanent. Si le fluide est visqueux, la charge au pt aval < charge au point amont. La diff entre les 2 s'appelle la perte de charge "

→ $2\rho(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\text{grad}(\rho g H) + \vec{f}'$ ($H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g}$)

→ Soit dx_i un vecteur unitaire // au vecteur vitesse. On multiplie les membres

⇒ $0 = -dx_i \partial_i (\rho g H) + f'_i dx_i$

⇒ $\int_i \partial_i (\rho g H) dx_i = \int_i f'_i dx_i$

⇒ $\rho g (H_2 - H_1) = \int_i f'_i dx_i$

E dissipé par frottement visqueux et turbulent

⇒ $H_1 = H_2 + \text{perte de charge}$

→ Bernoulli 4

La généralisation de Bernoulli 3 à l'écoulement dans un tube de courant.

Soit vitesse débitante u : $uS = \int_S v dS$ (u est uniforme et assure le même débit que la vitesse réelle v)

⇒ $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\rho(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\text{grad} \left(p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2} \right) + \vec{f}'$

→ Soit écoulement permanent incompressible. On multiplie scalairement par $\vec{v} dV$ et on intègre sur V

⇒ $-\underbrace{\int_V \partial_i [p + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2}] v_i dV}_{(1)} + \int_V f'_i v_i dV = 0$

(1) : par partie : $(\partial_i \epsilon) v_i = (\partial_i \epsilon v_i) - \epsilon (\partial_i v_i)$

⇒ $-\oint_S (\epsilon v_i n_i) dS + \int_V f'_i v_i dV = 0$ (Gauss 3D)

→ définissons $\alpha \propto \int_V \frac{v^3}{v^3} dV = \alpha v^3 S$

→ $\int_S (p + \rho g z) v dS = \int_S \hat{p} v dS = \hat{p} u S$

⇒ $\left[\alpha \rho \frac{u^3}{2} S + (p + \rho g z) u S \right]_2 - \left[\alpha \rho \frac{u^3}{2} S + (p + \rho g z) u S \right]_1$

= $-\Delta H_{1-2} (u S \rho g)$

→ $u_1 S_1 = u_2 S_2$ et on divise par $(u S \rho g)$ ⇒ $\left[\alpha_1 \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right] = \left[\alpha_2 \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right] + \Delta H_{1-2}$