

ELEC 242 – Automatique – Systèmes continus

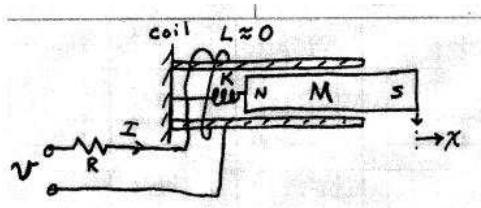
Examen oral

JONATHAN GOLDWASSER

Question 1

Enoncé

Supposons qu'on utilise un électro-aimant pour positionner un aimant permanent de masse M attaché à un mur par un ressort de constante de raideur K . L'enroulement possède une inductance négligeable et une résistance R . On applique à l'enroulement une tension v . Les forces de frottements dans le système sont représentées par un coefficient de frottement W et la force appliquée sur l'aimant permanent est proportionnelle au courant dans l'enroulement avec une constante de proportionnalité α . La variable de déplacement est x .



- Déterminer l'équation du mouvement du système.
- Choisir des variables d'états et déterminer les matrices A , B , C et D .
- Déterminer la transmittance entre v et x .
- Utiliser le critère de ROUTH pour déterminer la stabilité.
- Le système est-il propre ? Observable ? Gouvernable ?

Résolution

a) Equation du mouvement

Par application de la loi de NEWTON, on a :

$$M\ddot{x} + W\dot{x} + Kx = \frac{\alpha v}{R}$$

b) Choisir des variables d'états et déterminer les matrices du système

On choisit comme variables d'états la position (x_1) et la vitesse (x_2) et le système peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{W}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{RM} \end{pmatrix} v$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0v$$

c) **Transmittance entre v et x**

On a :

$$(Mp^2 + Wp + K)X(p) = \frac{\alpha V(p)}{R} \implies F(p) = \frac{\alpha}{RMp^2 + RWp + RK}$$

d) **Critère de ROUTH**

On construit une table de ROUTH :

$$\begin{array}{ccc} p^2 & 1 & \frac{K}{M} \\ p^1 & \frac{W}{M} & \\ p^0 & \frac{\frac{W}{K} \frac{K}{M} - 0}{\frac{W}{M}} = \frac{K}{M} & \end{array}$$

On remarque donc que le système est toujours stable puisque les coefficients W , K et M sont positifs.

e) **Propre ? Observable ? Gouvernable ?**

Le système est strictement propre puisque $D = 0$. Pour déterminer l'observabilité et la gouvernabilité, construisons les matrices \mathcal{O} et \mathcal{G} :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \text{Observable}$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{RM} \\ \frac{\alpha}{RM} & -\frac{W\alpha}{RM^2} \end{bmatrix} \implies \text{Gouvernable}$$

Question 2

Enoncé

Soit la transmittance suivante :

$$F(p) = \frac{K(p+10)^2}{p^3}$$

- Tracer ses courbes de BODE pour $K = 7$ et déterminer sa marge de phase M_φ ainsi que sa marge de gain M_G . Conclure quant à l'impossibilité de déterminer la stabilité du système en boucle fermée sur la base de ces marges.
- Tracer sa courbe de NYQUIST complète et utiliser le critère de NYQUIST pour déterminer la stabilité du système en boucle fermée.

Résolution

a) BODE

Les pôles et zéros de $F(p)$ sont :

$$\begin{aligned} p = 0 & \quad \text{Triple pôle hurwitzien au sens large} \implies -60 \text{ dB/déc et } -270^\circ \\ p = -10 & \quad \text{Double zéro hurwitzien} \implies +40 \text{ dB/déc et } +180^\circ \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de tracer les courbes de BODE.

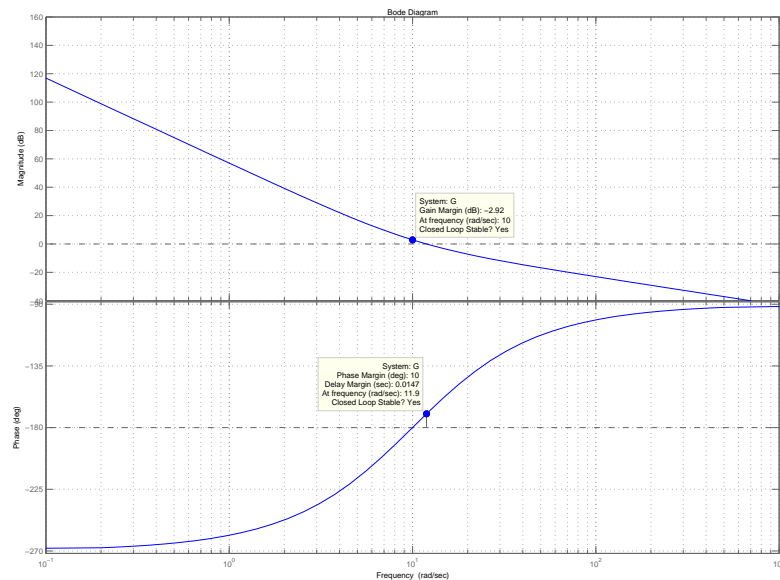


FIG. 1 – Courbes de BODE pour $K = 7$

On remarque que $M_\varphi = +10^\circ$ (stable) et que $M_G = -2.92 \text{ dB}$ (instable). Il

est donc impossible de conclure quant à la stabilité du système en boucle fermée à l'aide de ces marges.

b) NYQUIST

Scindons $F(jw)$ en sa partie réelle et imaginaire, on a :

$$F(p)|_{p=jw} = \frac{7(jw + 10)^2}{-jw^3} \frac{jw^3}{jw^3} = \frac{-140}{w^2} + j \frac{-7w^2 + 700}{w^3}$$

Afin de tracer la courbe de NYQUIST, évaluons en quelques points remarquables :

$$\Re\{F(jw)\} = 0 \iff w = +\infty \implies \Im\{F(jw)\} = 0$$

$$\Im\{F(jw)\} = 0 \iff w = \pm 10 \implies \Re\{F(jw)\} = -1,4$$

Nous sommes maintenant en mesure de tracer la courbe de NYQUIST complète.

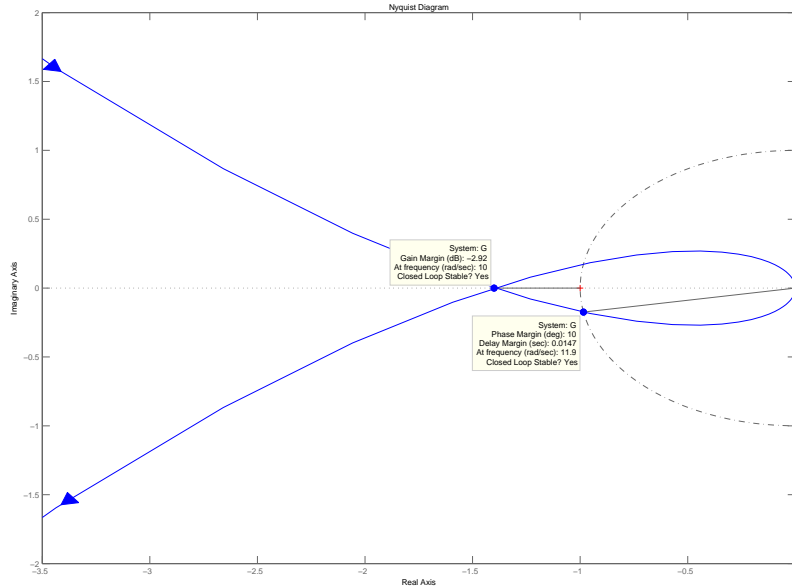


FIG. 2 – Courbe de NYQUIST complète pour $K = 7$

Pour appliquer le critère de NYQUIST, il est resté à déterminer l'image par $F(p)$ de $p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}$ pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ puisque $F(p)$ contient une singularité à l'origine :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 e^{j2\theta} + 100 + 20\varepsilon e^{j\theta}}{\varepsilon^3 e^{j3\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 100\varepsilon^{-3} e^{-j3\theta}$$

Ce qui nous donne un cercle et demi de rayon infini orienté dans le sens horlogique. Appliquons maintenant le critère de NYQUIST :

$$P_{BF} = P_{BO} + N_{-1} = 0 + (1 - 1) = 0$$

On en conclut que le système est stable en boucle fermée pour $K = 7$.

Question 3

Enoncé

Soit un servomécanisme décrit par le schéma bloc suivant :

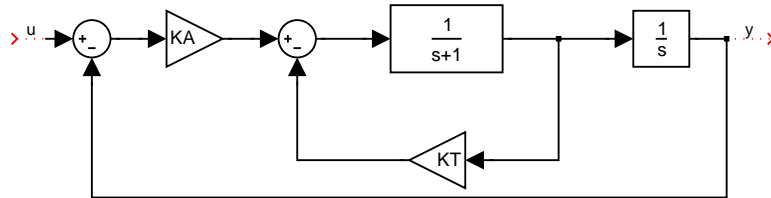


FIG. 1 – Schéma bloc d'un servomécanisme

dans lequel K_T représente le gain du tachymètre et K_A le gain de l'amplificateur.

Déterminer l'influence de K_A et K_T sur la position des pôles de ce système en procédant de la manière suivante :

- Tracer le lieu des racines en fonction du paramètre K_T ($K_T > 0$) en fixant K_A à une valeur nominale de 4. Choisir dans ce lieu une configuration des pôles telle que le facteur d'amortissement ζ soit égal à $\frac{1}{2}$.
- Tracer le lieu des racines en fonction du paramètre $K_1 = K_A - 4$ ($K_1 > 0$) de manière à étudier l'influence sur le lieu d'une valeur de K_A supérieure à sa valeur nominale.

Résolution

a) Lieu des racines en fonction de K_T ($K_T > 0$) pour $K_A = 4$

L'équation caractéristique du système est donnée par :

$$1 + \frac{K_A}{p(p+1)} + \frac{K_T}{p+1} = p^2 + p + K_A + K_T p = 0$$

Après avoir posé $K_A = 4$, on peut se ramener à un cas classique du lieu des racines du type $1 + k\overline{BO}(p) = 0$:

$$1 + K_T \frac{p}{p^2 + p + 4} = 0$$

Pour ce lieu, le zéro est situé en $p = 0$ et les pôles, au départ, en $p = -\frac{1}{2} \pm j1,94$. En utilisant successivement les règles pour le tracé approximatif du lieu, on a :

- Nombre de branches : 2
- Intersection du lieu avec l'axe réel :

$$\frac{1}{\sigma_c + \frac{1}{2} - j1,94} + \frac{1}{\sigma_c + \frac{1}{2} + j1,94} = \frac{1}{\sigma_c} \iff \sigma_c = -2$$

- Orientation de départ : $\varphi_l(-\frac{1}{2} \pm j1,94) \simeq 115^\circ - 90^\circ + 180^\circ = 205^\circ$
- Nombre d'asymptotes (défaut de zéro) : $2 - 1 = 1$

– Direction asymptotique : $\psi_{as} = \pi$
 On obtient donc le lieu suivant :

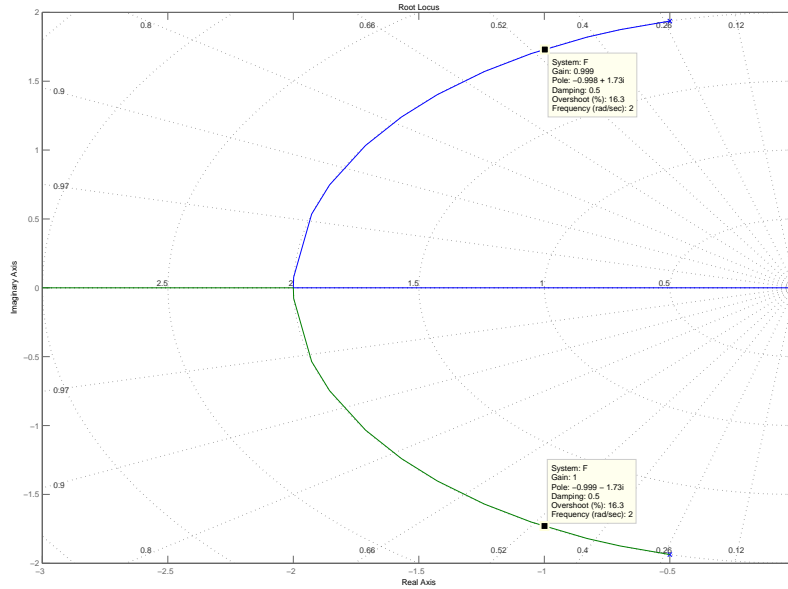


FIG. 2 – Lieu des racines en fonction de K_T ($K_T > 0$) pour $K_A = 4$

Pour obtenir un facteur d'amortissement $\zeta = \frac{1}{2}$, il faut placer les pôles à l'intersection du lieu et des droites décalées de $\pm 30^\circ$ de l'axe imaginaire. On peut alors estimer la valeur de K_T à l'aide du critère du module :

$$K_T \simeq \frac{\sqrt{\frac{1}{2}^2 + (1,94 - 1,73)^2} \sqrt{\frac{1}{2}^2 + (1,94 + 1,73)^2}}{\sqrt{1^2 + 1,73^2}} \simeq 1$$

b) Lieu des racines en fonction de K_1 ($K_1 > 0$) pour $K_T = 1$

En posant $K_1 = K_A - 4$, on peut se ramener à un cas classique du lieu des racines comme précédemment :

$$1 + K_1 \frac{1}{p^2 + 2p + 4} = 0$$

Pour ce lieu, les pôles, au départ, sont situés là où on les a laissés dans le premier lieu c'est à dire en $p = -1 \pm j1,73$. En utilisant successivement les règles pour le tracé approximatif du lieu, on a :

- Nombre de branches : 2
- Orientation de départ : $\varphi_l(-1 \pm j1,73) = \pm \frac{\pi}{2}$
- Nombre d'asymptotes (défaut de zéro) : $2 - 0 = 2$
- Directions asymptotiques : $\psi_{as}(-1 \pm j1,73) = \pm \frac{\pi}{2}$

On obtient donc le lieu suivant :

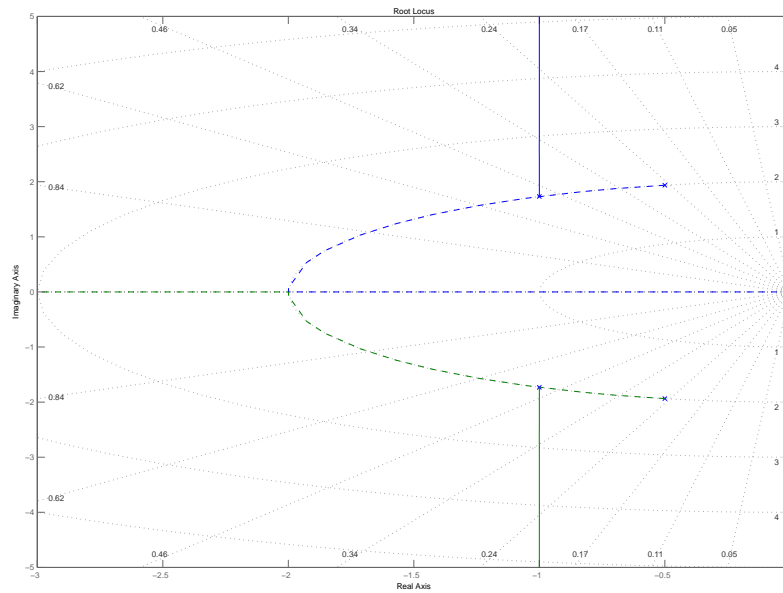


FIG. 3 – Lieu des racines en fonction de K_1 ($K_1 > 0$) pour $K_T = 1$

Références

- [1] Raymond Hanus et Philippe Bogaerts. *Introduction à l'automatique - Systèmes continus*, volume 1. De Boeck Université, 1996.
- [2] Gene F. Franklin, J. David Powell, and Abbas Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Prentice Hall, fourth edition, 2002.

A propos de ce document

Document réalisé en L^AT_EX 2_ε utilisant les lignes de commandes suivantes :

```
▷ latex elec242_oral.tex
▷ dvips -Ppdf -tA4 -G0 elec242_oral.dvi
▷ ps2pdf elec242_oral.ps
```

Écrit par : *Jonathan Goldwasser* — Dernière révision : *24 janvier 2005*